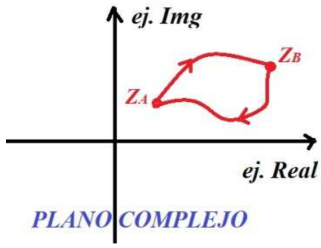
V-16 (1 h, 0 min) 12-Abril-2019 Resumen de Miguel Cañizares	**Integrales de cotorno en el plano complejo**

Cuando se integra una función de una variable real f(x), entre dos puntos x_A y x_B del eje X, no hace falta especificar camino, pues la variable x sólo se mueve a lo largo de dicho eje. Cuando se trata de integrar una función de variable compleja f(z), entre dos puntos z_A y z_B del plano complejo, lógicamente hay que especificar un camino. Estas integrales serán necesarias en próximos capítulos para hallar funciones de Green.

<u>Integración de función de variable compleja f(z) a través de contorno en plano complejo</u>.

$\int_{z_A}^{z_B} f(z)\,dz$ se parametriza con R y θ ($z = R\cdot e^{i\theta}$) y se resuelve según camino elegido.



Si el camino es cerrado "C" se cumple:

$\oint f(z)dz = 0$ si *f(z)* es Holomorfa (sin puntos "raros" en camino C o dentro de él)

$\oint f(z)dz \neq 0$ si *f(z)* tiene algún punto "raro" en el camino cerrado "C" o dentro de él.

EJEMPLO $\boldsymbol{f(z) = \frac{1}{z}}$ tiene un punto "raro" (tiende a infinito) en z = 0: A ese punto se le llama "polo"

Si integramos en camino cerrado ABCDA de la figura, el polo queda fuera y la integral debe dar cero. En efecto:

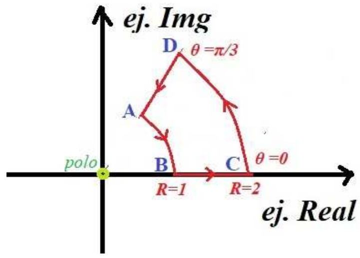
$$\int_A^B \frac{1}{z}dz = [\ln z]_A^B = \left[\ln Re^{i\theta}\right]_A^B = [\ln R + i\theta]_A^B = (\ln 1 + i\cdot 0) - (\ln 1 + i\tfrac{\pi}{3}) = -i\frac{\pi}{3}$$

$$\int_B^C \frac{1}{z}dz = [\ln z]_B^C = \left[\ln Re^{i\theta}\right]_B^C = [\ln R + i\theta]_B^C = (\ln 2 + i\cdot 0) - (\ln 1 + i\cdot 0) = \ln 2$$

$$\int_C^D \frac{1}{z}dz = [\ln z]_C^D = \left[\ln Re^{i\theta}\right]_C^D = [\ln R + i\theta]_C^D = (\ln 2 + i\tfrac{\pi}{3}) - (\ln 2 + i\cdot 0) = +i\frac{\pi}{3}$$

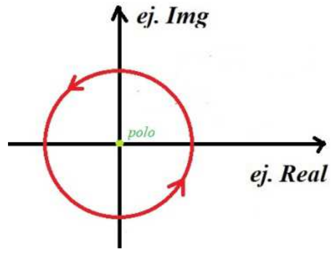
$$\int_D^A \frac{1}{z}dz = [\ln z]_D^A = \left[\ln Re^{i\theta}\right]_D^A = [\ln R + i\theta]_D^A = (\ln 1 + i\tfrac{\pi}{3}) - (\ln 2 + i\tfrac{\pi}{3}) = -\ln 2$$

Sumando los tramos queda, para el contorno cerrado ABCDA: $\oint \frac{1}{z}dz = \mathbf{0}$



Si integramos en camino cerrado de circunferencia, de radio R, con el polo en el centro, la integral no será:

$$\oint \frac{1}{z}dz = [\ln z]_A^A = [\ln R + i\theta]_0^{2\pi} = (\ln R + i\cdot 2\pi) - (\ln R + i\cdot 0) = \boldsymbol{2\pi\, i}$$

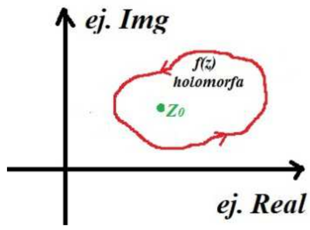


Vemos que en este caso, por estar el punto "raro" (polo) en el interior del contorno, la integral no resulta nula a pesar de recorrer un camino cerrado.

Se puede comprobar en diversos casos y Cauchy estableció un teorema

<u>Teorema de Cauchy para integrar funciones tipo $\frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}$ en contorno cerrado *C* con un polo z_0 en su interior</u>

Si <u>dentro de ese contorno f(z) es holomorfa y la integracón se hace en sentido antihorario</u>, la fórmula integral de Cauchy dice:



$$\oint \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz = \frac{2\pi i}{n!}\cdot f^{(n^{a})}(z_0) \qquad \textbf{(I)}$$

Esta fórmula se comprueba en los siguientes ejemplos:

$$\oint \frac{1}{z}dz = \oint \frac{1}{(z-0)^{0+1}}dz = \frac{2\pi i}{0!}\cdot(\textit{derivada cero ésima de } 1 \textit{ evaluada en } 0 = 1) = \boldsymbol{2\pi i}$$

$$\oint \frac{z^2+1}{z}dz = \oint z\,dz + \oint \frac{1}{z}dz = 0 + 2\pi i = \boldsymbol{2\pi i} \quad \text{También: } \oint \frac{z^2+1}{z}dz = \oint \frac{z^2+1}{(z-0)^{0+1}}dz = \frac{2\pi i}{0!}\cdot(0^2+1) = \boldsymbol{2\pi i}$$

$$\oint \frac{e^{z+2}}{z}dz = e^2\oint \frac{e^z}{z}dz = e^2\oint \frac{1+z+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}+\cdots}{z}dz = e^2\left[\oint \frac{1}{z}dz + \oint \frac{z}{2!}dz + \oint \frac{z^2}{3!}dz + \cdots\right] = e^2[2\pi i + 0 + \cdots] = \boldsymbol{e^2 2\pi i}$$

También, aplicando el teorema de Cauchy: $\oint \frac{e^{z+2}}{z}dz = \oint \frac{e^{z+2}}{(z-0)^{0+1}}dz = \frac{2\pi i}{0!}\cdot(e^{0+2}) = \boldsymbol{e^2 2\pi i}$

$$\oint \frac{e^z}{z-2}dz = \oint \frac{e^z}{(z-2)^{0+1}}dz = \frac{2\pi i}{0!}\cdot(\textit{derivada cero ésima de } e^z \textit{ evaluada en } z = 2) = \boldsymbol{2\pi i\cdot e^2}$$

En el video 14 vimos la integral: $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+K^2}\, e^{iK(x-x')} dK = \pi \cdot e^{-|x-x'|}$ ó $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{iaK}}{1+K^2} dK = \pi \cdot e^{-|a|}$

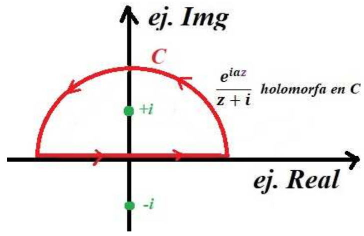
Se demostró haciendo la transfomada de Fourier de la función $\phi(x) = e^{-|x-x'|}$

Ahora lo demostramos utilizando el teorema integral de Cauchy aplicado a: $\oint \frac{e^{iaz}}{1+z^2} dz$

$\frac{e^{iaz}}{1+z^2}$ tiene dos valores z_0 (polos) que cumplen $1+z^2 = 0$ y hacen infinita a la función. Son: $z_0 = +i$ y $z_0 = -i$

Por otro lado, $1+z^2$ se puede poner como producto: $1 + z^2 = (z+i)\cdot(z-i)$

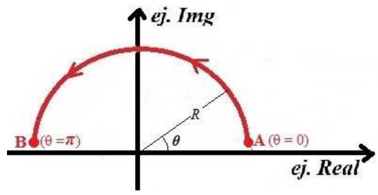
Vamos a hacer la integral $\oint \frac{e^{iaz}}{1+z^2} dz$, pero a través de dos caminos cerrados diferentes C y C´ de forma que en cada uno se encierre un polo, haya en el numerador una función holomorfa y podamos aplicar el T. Cauchy:



El camino **C** de la figura encierra a $z_0 = +i$ y lo recorremos en sentido antihorario.
Según el T. de Cauchy pondremos:

$$\oint \frac{e^{iaz}}{1+z^2} dz = \oint \frac{\frac{e^{iaz}}{z+i}}{z-i} dz = \left(\frac{e^{iaz}}{z+i}\ holomorfa\ en\ C \right) = \frac{2\pi i}{0!} \cdot \frac{e^{iai}}{i+i} = \boldsymbol{\pi e^{-a}}$$

Una vez calculada la integral en el contorno cerrado C (aplicando el T. Cauchy), calcularemos la integral en la parte circular del recorrido parametrizando $z = Re^{i\theta}$ y limitando $\theta \in [0, \pi]$. Comprobaremos que es nula cuando $R \to \infty$



$$\int_A^B \frac{e^{iaz}}{1+z^2} dz = \int_{\theta=0}^{\theta=\pi} \frac{e^{iaR(\cos\theta + i\, sen\,\theta)}}{1+R^2 e^{2i\theta}} Rie^{i\theta} d\theta = \int_{\theta=0}^{\theta=\pi} e^{iaR\cos\theta}\, e^{-aRsen\,\theta}\, \frac{Rie^{i\theta}}{1+R^2e^{2i\theta}} d\theta$$

Si hacemos que R $\to \infty$ fijémonos en cada uno de los factores (coloreados):

$e^{iaR\cos\theta} = \cos(aR\cos\theta) + i\, sen\, (aR\cos\theta)$ es acotado, pues aunque $R \to \infty$ está dentro de un *seno* o *coseno*

$e^{-aRsen\,\theta}$ como $\theta \in [0, \pi]$ el *sen* θ es positivo, también R. Así que cuando $R \to \infty$ ese factor tiende a cero si $a > 0$

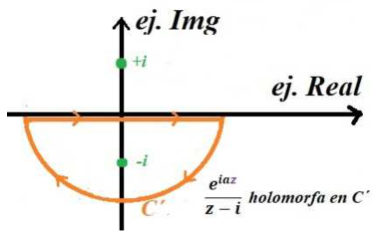
$\frac{Rie^{i\theta}}{1+R^2e^{2i\theta}}$ cuando $R \to \infty$ ese factor es equivalente a $1/R$ y tiende a cero.

Concluimos que $\lim_{R\to\infty} \int_A^B \frac{e^{iaz}}{1+z^2} dz = 0$ con la condición de que **a > 0**.

Entonces, podemos poner: $\oint \frac{e^{iaz}}{1+z^2} dz = \int_A^B \frac{e^{iaz}}{1+z^2} dz + \int_{-R}^{+R} \frac{e^{iaz}}{1+z^2} dz = (si\ R \to \infty) = 0 + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{iaz}}{1+z^2} dz$

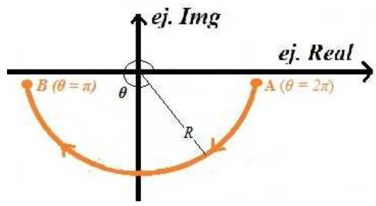
Luego: $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{iaz}}{1+z^2} dz = \pi e^{-a} \quad con\ a > 0$

Hacemos ahora lo mismo pero con el camino cerrado **C´** de la figura, que encierra a $z_0 = -i$ y lo recorremos en sentido horario, luego cambiará de signo la integral de Cauchy. Pondremos:



$$\oint \frac{e^{iaz}}{1+z^2} dz = \oint \frac{\frac{e^{iaz}}{z-i}}{z+i} dz = \left(\frac{e^{iaz}}{z-i}\ holomorfa\ en\ C' \right) = -\frac{2\pi i}{0!} \cdot \frac{e^{ia(-i)}}{-i-i} = \boldsymbol{\pi e^{+a}}$$

También comprobaremos que la integral del trayecto circular es nula cuando $R \to \infty$



$$\int_A^B \frac{e^{iaz}}{1+z^2} dz = \int_{\theta=2\pi}^{\theta=\pi} \frac{e^{iaR(\cos\theta + i\, sen\,\theta)}}{1+R^2 e^{2i\theta}} Rie^{i\theta} d\theta = \int_{\theta=2\pi}^{\theta=\pi} e^{iaR\cos\theta}\, e^{-aRsen\,\theta}\, \frac{Rie^{i\theta}}{1+R^2e^{2i\theta}} d\theta$$

Para los factores azul y verde sirve el mismo razonamiento que antes

Para el factor rojo fijémonos que, en este caso, como $\theta \in [2\pi, \pi]$ el *sen* θ siempre será negativo, R es positivo, luego cuando $R \to \infty$ ese factor tenderá a cero *si $a < 0$.*

Razonando exactamente igual que antes, llegamos a: $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{iaz}}{1+z^2} dz = \pi e^{+a} \quad con\ a < 0$

Compaginando los dos resultados obtenidos para la integral $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{iaz}}{1+z^2} dz$, fácilmente se concluye:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{iaz}}{1+z^2} dz = \pi e^{-|a|} \xrightarrow{al\ ser\ integral\ en\ el\ eje\ Real\ z\,=\,x} \boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{iax}}{1+x^2} dx = \pi e^{-|a|}}$$